

به نام خدا

نمونه سوالات درس

معادلات دیفرانسیل

رشته های

مهندسی عمران، برق و کامپیوتر

گروه ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد اصفهان

برای حل مسائل بیشتر به کتاب های زیر مراجعه نمایید:

➤ معادلات دیفرانسیل، تألیف دکتر اصغر کرایه چیان

➤ معادلات دیفرانسیل، تألیف دکتر بیژن طائری

سوالات مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱- معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید.

- i. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$
- ii. $y' = x - xy - y + 1$
- iii. $xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^2$
- iv. $(1 + \ln x)dx + (1 + \ln y)dy = 0$
- v. $a^2 dx = x\sqrt{x^2 - a^2} dy$
- vi. $(1 + y^2) \cos x dx = 2(1 + \sin^2 x) dy$
- vii. $y' = e^{y-x} \sin x$
- viii. $ye^{x+y} dy = dx$

۲- جواب هر یک از مسائل مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

- i. $\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = xe^{-y}$, $y(0) = 0$
- ii. $y' = xe^{y-x^2}$, $y(0) = 0$
- iii. $(x+1)y' = x\sqrt{y+1}$, $y(0) = 0$
- iv. $\frac{y'}{y} - x = xy$, $y(0) = 1$

۳- جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

- i. $x \cos\left(\frac{y}{x}\right) y' = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$
- ii. $(x^2 + y^2)dy + 2x(x + y)dx = 0$
- iii. $y(x^2 - xy + y^2) + xy'(x^2 + xy + y^2) = 0$
- iv. $xdy - ydx = \sqrt{xy}dx$
- v. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + y$
- vi. $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y})dy = 0$
- vii. $\left(x \tan\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)dx - xdy = 0$

۴- جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

- i. $y' = -\frac{x+2y}{y}$, $y(1) = 1$
- ii. $y' = \sqrt{\frac{x+y}{2x}}$, $y(1) = 2$
- iii. $x(x+y)y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 0$

۵- جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را در صورت کامل بودن به دست آورید.

- i. $(e^x \cos y - x^2)dx + (e^y \sin x + y^2)dy = 0$
- ii. $(2xy - \tan y)dx + (x^2 - x \sec^2 y)dy = 0$
- iii. $ye^{xy}dx + (xe^{xy} + 1)dy = 0$
- iv. $\cos y dx + \sin x dy = 0$
- v. $\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy = 0$, $y(-1) = 2$
- vi. $(ye^{xy} - 2y^3)dx + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)dy = 0$, $y(0) = 2$

۶- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

- i. $yy' - 7y = 6x$
- ii. $y' + y \cot x = \frac{1}{\sin x}$
- iii. $(\sin^2 x - y)dx - \tan x dy = 0$
- iv. $(x^2 + 2y)dx - xdy = 0$
- v. $y' - \frac{3}{x-1}y = (x-1)^4$
- vi. $dx - (1 + 2x \tan y)dy = 0$
- vii. $y' = y + 3x^2 e^x$
- viii. $(1 + x^2)y' + 2xy = -2x$, $y(0) = -1$
- ix. $\frac{dr}{d\theta} + r \tan \theta = \cos^2 \theta$, $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- x. $(1 - x^2)y' + xy = x$, $y(0) = 2$

۷- معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

- i. $y(6y^2 - x - 1)dx + 2x dy = 0$
- ii. $y' - 2xy = 4xy^{\frac{1}{2}}$
- iii. $dy + (4y - 8y^{-3})x dx = 0$

$$\text{iv. } \frac{dy}{dx} = y \cot x + \frac{y^2}{\sin x}$$

$$\text{v. } y' + \frac{1}{x}y = -2xy^2$$

$$\text{vi. } x(x^2 - 1)y' - y = x^3y^2, \quad y(2) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{vii. } xy' + \frac{y}{2 \ln x} = y^2$$

۸- جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$\text{i. } (x^2 - 2y)dx + xdy = 0$$

$$\text{ii. } (4x^2y^3 - 2y)dx + (3x^3y^2 - x)dy = 0$$

$$\text{iii. } (y^2 + x^2 + y)dy + xy dx = 0$$

$$\text{iv. } 2x(y - e^{-x^2})dx + dy = 0$$

$$\text{v. } (x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0$$

$$\text{vi. } y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$$

$$\text{vii. } (3y - 2xe^{-3x})dx + dy = 0$$

$$\text{viii. } (y - 2x)dx - xdy = 0$$

$$\text{ix. } (3y + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2y)dy = 0$$

$$\text{x. } x^3y^3(2y dx + x dy) - (5y dx + 7x dy) = 0$$

۹- تحقیق کنید تابع $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ یک عامل انتگرال ساز معادله زیر است. سپس، به کمک آن معادله را حل نمایید.

$$(2x^2 + 2y^2 + x)dx + (x^2 + y^2 + y)dy = 0$$

۱۰- جواب عمومی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید.

$$\text{i. } y' = \frac{x+2y-4}{2x+y-5}$$

$$\text{ii. } (x - 4y - 9)dx + (4x + y - 2)dy = 0$$

۱۱- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y' = \frac{4(3x + y - 2)}{3x + y}, \quad y(1) = 0$$

۱۲- جواب عمومی هریک از معادلات مرتبه دوم زیر را پیدا کنید.

- i. $2y'' = e^y$
- ii. $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$
- iii. $(y'')^2 = (1 + (y')^2)^3$
- iv. $yy' = y''\sqrt{y^2 + (y')^2} - y'y''$
- v. $yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$

۱۳- جواب هر یک از مسائل مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

- i. $xy'' + y' + x = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$
- ii. $yy'' - (y')^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- iii. $y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$

۱۴- معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تغییر متغیر داده شده حل کنید.

- i. $(2 + 2x^2y^{\frac{1}{2}})ydx + (x^2y^{\frac{1}{2}} + 2)x dy = 0$, $x^2y^{\frac{1}{2}} = u$
- ii. $y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2) dy = 0$, $xy = u$

سوالات مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

۱- جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

i. $4y'' - 4y' + y = 0$

ii. $y'' - 2y' + 5y = 0$

۲- جواب هر یک از مسائل مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

i. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$

ii. $y''' - 3y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$, $y''(0) = 0$

۳- جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

i. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 4e^{-x}$

ii. $y'' - 4y' + 4y = 5 \sin x$

iii. $y'' - 4y' + 4y = 12xe^{2x}$

iv. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos 2x$

v. $y'' + y = 6e^x + 6 \sin x$

vi. $y'' - y' - 2y = \cosh 2x$

vii. $y'' - y' - 2y = 2xe^{-x} + x^2$

۴- برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر، یک جواب خصوصی به روش ضرایب نامعین پیدا کنید.

i. $y'' - y' = e^x + \sin x$

ii. $y'' + y = e^x(x + 1)$

۵- مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

i. $y'' + y' = 4 \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$

ii. $y'' + 2y' + 3y = 5e^{2x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$

۶- در معادلات همگن زیر، یک جواب داده شده است. جواب عمومی هریک را به روش کاهش مرتبه پیدا کنید.

- i. $x^3 y'' + xy' - y = 0$, $y_1 = x$
- ii. $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{9}{x^4}y = 0$, $y_1 = \cos\left(\frac{3}{x}\right)$
- iii. $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$, $y_1 = e^x$
- iv. $x^2 y'' + x^2 y' - (x+2)y = 0$, $y_1 = \frac{1}{x}e^{-x}$
- v. $x(1-2x \ln x)y'' + (1+4x^2 \ln x)y' - (2+4x)y = 0$, $y_1 = \ln x$

۷- جواب عمومی معادلات ناهمگن زیر را به روش تغییر پارامترها به دست آورید.

- i. $y'' + y = \tan x$
- ii. $y'' + y = \sec x$
- iii. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{1+x}$
- iv. $y'' - 12y' + 36y = e^{6x} \ln x$
- v. $y'' - y' = \sec^2 x - \tan x$
- vi. $y'' + 2y' + y = x^{-2}e^{-x} \ln x$
- vii. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x$

۸- در معادلات ناهمگن زیر، یک جواب معادله همگن نظیر داده شده است. جواب عمومی را به روش تغییر پارامترها بیابید.

- i. $2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = e^x$, $y_1 = e^x$
- ii. $x^2 y'' + 4xy' - 4y = x^3$, $y_1 = x$

۹- جواب عمومی معادلات اوایلر زیر را پیدا کنید.

- i. $x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0$
- ii. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6 \ln x$, $x > 0$
- iii. $x^2 y'' + xy' - y = -2x^2 e^x$
- iv. $x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^6$
- v. $x^2 y'' - 2y = \ln x$, $x > 0$

۱۰- برای معادلات اوایلر زیر، یک جواب خصوصی با شرایط داده شده بیابید.

i. $2x^2y'' + 7xy' - 3y = 0$, $y(-4) = 1$, $y'(-4) = 0$

ii. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

۱۱- برای معادله اوایلر زیر، یک جواب خصوصی با روش تغییر پارامترها بیابید.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2 + x^3} , \quad x > 0$$

۱۲- با تغییر متغیر $t = ax + b$ ، جواب عمومی معادلات اوایلر زیر را پیدا کنید.

i. $(x - 3)^2y'' + 3(x - 3)y' + y = 0$, $x > 3$

ii. $(x - 2)^2y'' - (x - 2)y' + y = 0$, $x > 2$

سوالات مربوط به حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها

۱- جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x = 0$ ، به کمک سری‌ها به دست آورید.

- i. $y'' + xy' + 3y = x + 3$
- ii. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$
- iii. $xy'' + 2y' + x^2y = 0$
- iv. $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$
- v. $2x^2y'' + (x - x^2)y' - y = 0$
- vi. $xy'' + (x - 1)y' - 2y = 0$
- vii. $x^2y'' + xy' - y = 0$
- viii. $y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{(1-x^2)}{2x^2}y = 0$

سوالات مربوط به تبدیلات لاپلاس

۱- تبدیل لاپلاس توابع داده شده را به دست آورید.

- i. $f(t) = e^{3t} \cos 2t - e^t \sinh 5t$
- ii. $f(t) = \int_0^t e^x \cos 2x \, dx$
- iii. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$

۲- تبدیل معکوس لاپلاس توابع داده شده را به دست آورید.

- i. $F(s) = \frac{1}{s^3 - 3s^2 + 2s}$
- ii. $F(s) = \frac{2s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$
- iii. $F(s) = \frac{s^3}{s^4 - 5s^2 + 4}$
- iv. $F(s) = \frac{1}{s^4 + 5s^2 + 4}$
- v. $F(s) = \frac{1}{(s^2 - 1)^2}$
- vi. $F(s) = \text{Ln} \left(\frac{s+1}{s-1} \right)$
- vii. $F(s) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{s} \right)$

۳- به کمک تبدیلات لاپلاس، انتگرال های زیر را محاسبه نمایید.

- i. $\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$
- ii. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad a > 0, b > 0$
- iii. $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1 - \cos t)}{t} dt$

۴- توابع $f(t)$ تعریف شده به صورت زیر را بر حسب تابع پله ای واحد نوشته و $L\{f(t)\}$ را محاسبه کنید.

- i. $f(t) = \begin{cases} e^t & 0 \leq t < 2\pi \\ e^t + \cos t & t \geq 2\pi \end{cases}$
- ii. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & \pi \leq t < 2\pi \\ \sin t & t \geq 2\pi \end{cases}$

۵- تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده است. نمودار آن را رسم کرده، سپس بر حسب تابع پله‌ای واحد نوشته و $L\{f(t)\}$ را محاسبه کنید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 4 & 1 \leq t < 3 \\ 5/2 & t \geq 3 \end{cases}$$

۶- جواب مسائل مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس به دست آورید.

- i. $x'(t) + 3x(t) = 0$ $x(3) = 1$
- ii. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{-t}$ $x(0) = 3, x'(0) = -3$
- iii. $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 39e^t \sin t$ $x(0) = -1, x'(0) = -1$
- iv. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 24 \cosh t$ $x(0) = 6, x'(0) = -3$

۷- جواب دستگاه‌های معادلات زیر را با روش تبدیلات لاپلاس به دست آورید.

- i. $\begin{cases} dx/dt = 4x - y \\ dy/dt = 2x + y \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 3$
- ii. $\begin{cases} dx/dt = 5x - 6y + 1 \\ dy/dt = 6x - 7y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 0$
- iii. $\begin{cases} d^2x/dt^2 - dx/dt + x - y = 0 \\ dy/dt - x + y + 1 = 0 \end{cases}$ $x(0) = 0, x'(0) = 0, y(0) = 0$

۸- تابع $f(t)$ به صورت زیر را با استفاده از انتگرال‌های تلفیقی به دست آورید.

- i. $f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} \right\}$
- ii. $f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2+1)^2} \right\}$

$$\text{iii. } f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2+1)} \right\}$$

$$\text{iv. } f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2-1)^2} \right\}$$

۹- با استفاده از انتگرال‌های تلفیقی، تبدیل لاپلاس توابع زیر را به‌دست آورید.

$$\text{i. } f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau \, d\tau$$

$$\text{ii. } f(t) = \int_0^t e^{2(t-\tau)} \tau^3 \, d\tau$$

۱۰- معادلات انتگرال زیر را حل کنید.

$$\text{i. } x(t) = 1 + 2 \int_0^t \cos(t-\tau) x(\tau) \, d\tau$$

$$\text{ii. } x(t) + \int_0^t e^{(t-\tau)} x(\tau) \, d\tau = 2t - 3$$

$$\text{iii. } x(t) = 3 - \int_0^t \sinh(t-\tau) x(\tau) \, d\tau$$

۱۱- معادله دیفرانسیل-انتگرال زیر را حل کنید.

$$x'(t) + 3x(t) + 2 \int_0^t x(\tau) \, d\tau = 3, \quad x(0) = 1$$